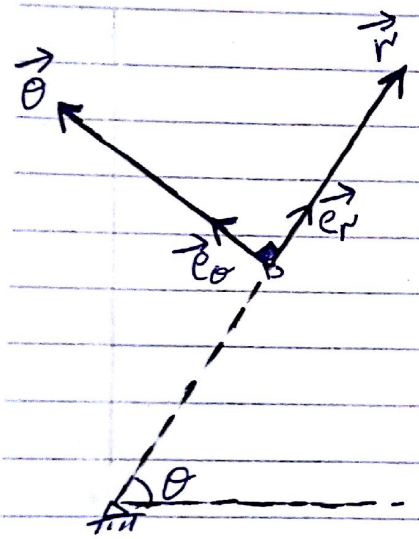
الإحداثيات القطبية

طريقة الإحداثيات القطبية:



$r = f(t)$

$\theta = f(t)$

$\vec{r}$: البعد بين النقطة المتحركة و النقطة الثابتة.

$\vec{\theta}$: بانجاه تزايد الزاوية θ.

السرعة:

$$\vec{V} = \vec{V_r} + \vec{V_\theta}$$

$$\Rightarrow v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$\Rightarrow v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_{tot} = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

التسارع:

$$\vec{A} = \vec{A_r} + \vec{A_\theta}$$

$$\Rightarrow a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

ملاحظة: المميزات القطبية هي:

$r \xrightarrow{\text{مشتقها}} \dot{r} \xrightarrow{\text{مشتقها}} \ddot{r}$

$\theta \xrightarrow{\text{"}} \dot{\theta} \xrightarrow{\text{"}} \ddot{\theta}$

Scanned by CamScanner

$$\vec{A} = \vec{A}_r + \vec{A}_\theta = \vec{A}^t + \vec{A}^n = \vec{A}_y + \vec{A}_x$$

الديكارتية = الطبيعية = القطبية

ملاحظة:

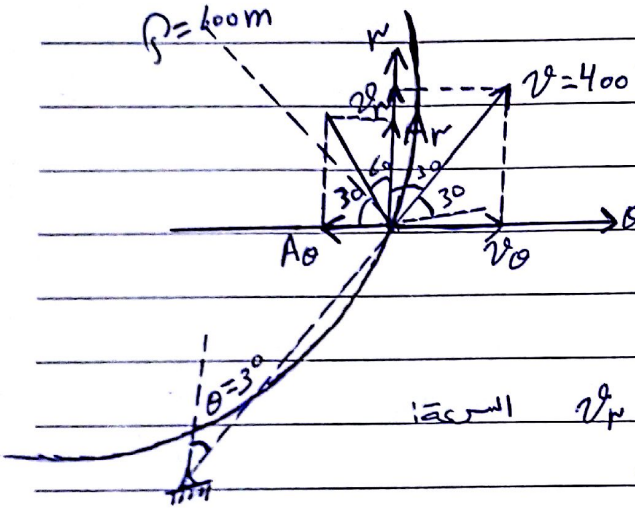
7
68

قاذفة طائرة نفاثة بسرعة ثابتة مقدارها 400 km/h على مسار مخني نصف قطر انحنائه 600 m عندما تكون الطائرة في الموضع P بحيث يصنع متجه السرعة مع الأفق زاوية $\beta = 3°$ (متساوية) ويظهر رادار الرصد البيانات التالية:

$r = 800\ m$ ، $\theta = 3°$

المطلوب الموضح المبين في الشكل تمثيل المركبات القطبية لسرعة الطائرة وتسارعها؟

الحل:



أول خطوة نرسم المحاور الرئيسية (r,θ)

ثم نسقط مثلث السرعة على المحاور (r,θ)

$$v = \frac{400 \times 1000}{3600} = 111{,}11\ m/s \quad \text{نحول km/h إلى m/s}$$

السرعة: $v_r = r\dot{} = v\cos 30$

$$v_r = 111{,}11 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_r = 96{,}2\ m/s$$

$$v_\theta = v\sin 30 = 111{,}111 \times \frac{1}{2} \Rightarrow v_\theta = 55{,}5\ m/s$$

التسارع: $\vec{A} = \vec{A}_r + \vec{A}_\theta$

$$\left.\begin{aligned} A_r &= r\ddot{} - r\dot{\theta}^2 \\ A_\theta &= r\ddot{\theta} + 2r\dot{}\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{أسئلة مجهول}$$

$\vec{A} = \vec{A}_r + \vec{A}_\theta = \vec{A}^n + \vec{A}^t$ نحل بالطريقة مجموع التسارعات:

$$A^n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(111{,}11)^2}{600} = 20{,}5\ m/s^2$$

Scanned by CamScanner

$A^t = \frac{dv}{dt} = 0$: $v = const$

$A = A^n = 20,5\ m/s^2$: نستنتج من الشكل

$A_r = A \cos 60$

$= 20,5 \times \frac{1}{2} \Rightarrow A_r = 10,25\ m/s^2$

$A_\theta = A \sin 60$

$= 20,5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_\theta = 17,7\ m/s^2$

ملاحظة: يمكننا أيضاً حساب A_θ و A_r عن القانون حسب فيثاغورث

$A_\theta = \sqrt{A^2 - A_r^2}$

$\rightarrow v_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} = \frac{55,5}{800} \Rightarrow \dot{\theta} = 0,06\ rad/s$

$\Rightarrow r'' = A_r + r\dot{\theta}^2 = 10,25 + 800(0,06) \Rightarrow r'' = 58,25\ m/s^2$

$\rightarrow \ddot{\theta} = \frac{A_\theta - 2r'\dot{\theta}}{r} = \frac{17,7 - 2(96,2)(0,06)}{(800)}$

$\Rightarrow \ddot{\theta} = -0,16\ rad/s^2$

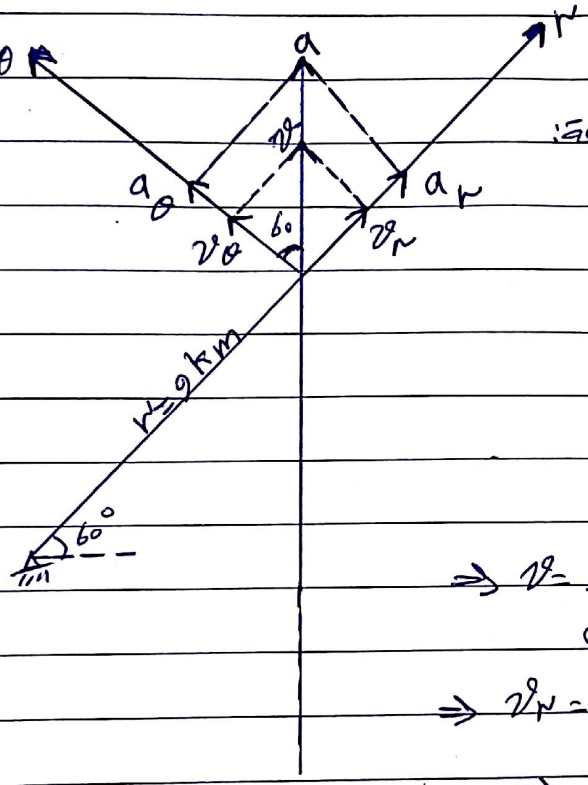
Scanned by CamScanner

11 | تتبع محطة رادار صاروخاً في أثناء انطلاقه رأسياً باتجاه الأعلى كما هو مبين في الشكل
70° | عندما تكون الزاوية ($\theta = 60°$) فإن المعطيات الأخرى تكون كما يلي:

$r = 9\,km$, $\ddot{r} = 21\,m/s^2$, $\dot{\theta} = 0,02\,rad/s$

المطلوب حساب سرعة الصاروخ وتسارعه في هذا الوضع ؟

الحل:



السرعة: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta$

$v_\theta = r\,\dot{\theta}$

$v_\theta = 9000 \times 0,02$

$\Rightarrow v_\theta = 180\,m/s$

نلاحظ أن $\cos 60 = \frac{v_\theta}{v}$

$\Rightarrow v = \frac{v_\theta}{\cos 60} = \frac{180}{1/2} = 360\,m/s$

$\Rightarrow v_r = \sqrt{(360)^2 - (180)^2} \simeq 312\,m/s$

التسارع: $\vec{A} = \vec{A}_r + \vec{A}_\theta$

$a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$

$a_r = 21 - 9000\,(0,02)^2$

$a_r = 17,4\,m/s^2$

$a = \frac{a_r}{\cos 30} = \frac{17,4}{\cos 30} = 20,09\,m/s^2$

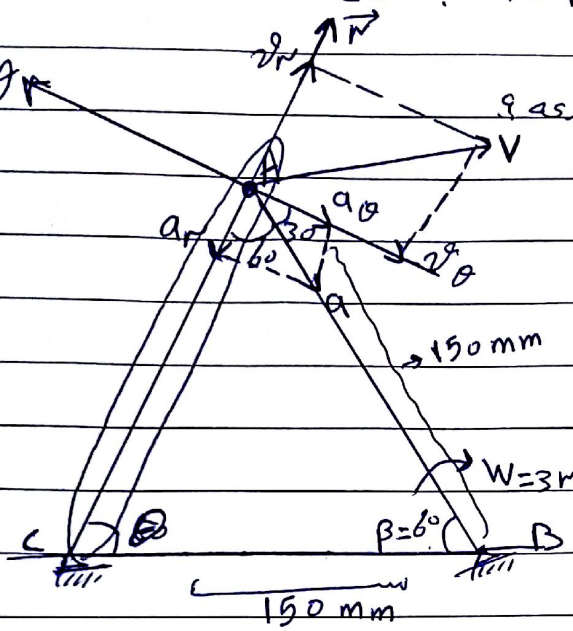
$a_\theta = \sqrt{a^2 - a_r^2} = \sqrt{(20,09)^2 - (17,4)^2}$

$a_\theta \simeq 10\,m/s^2$

Scanned by CamScanner

تمرين 2 / 6.9

يدور الذراع AB بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($W=3\ rad/s$) باتجاه عقارب الساعة مما يؤدي الى دوران الذراع المشحوق بواسطة المسمار A والمطلوب:
للوضع المبين في الشكل والموافق $\beta=60°$ وحساب ما يلي:
1) سرعة المسمار وتسارعه؟
2) المركبات المطبقة لسرعة المسمار وتسارعه؟



الحل:

نلاحظ أن $\theta=60°$

لأن المثلث متساوي الأضلاع.

$$v = WR$$

$$v = 3 \times 0,15 \Rightarrow v = 0,45\ m/s$$

$$A = A^n + A^t$$

$$a^n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,45)^2}{0,15} = 1,3\ m/s^2$$

$$a^t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad ; v = const.$$

$$v_r = v^\circ = v\cos 30 = 0,45 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_r = 0,3\ m/s$$

$$v_\theta = -v\sin 30 = -0,45 \times \frac{1}{2} \Rightarrow v_\theta = -0,2\ m/s$$

$$\theta^\circ = \frac{v_\theta}{r} = \frac{-0,2}{150} = -1,5 \times 10^{-3}\ r/s$$

$$a = a_n \ ; \ a_r = -a\cos 60 = -1,3 \times 1/2 \Rightarrow a_r = -0,65\ m/s^2$$

$$\Rightarrow r^{\circ\circ} = a_r + W\theta^{\circ 2} = (-0,65) + 150(-1,5 \times 10^{-3})^2 \Rightarrow r^{\circ\circ} = -0,6\ m/s^2$$

Scanned by CamScanner

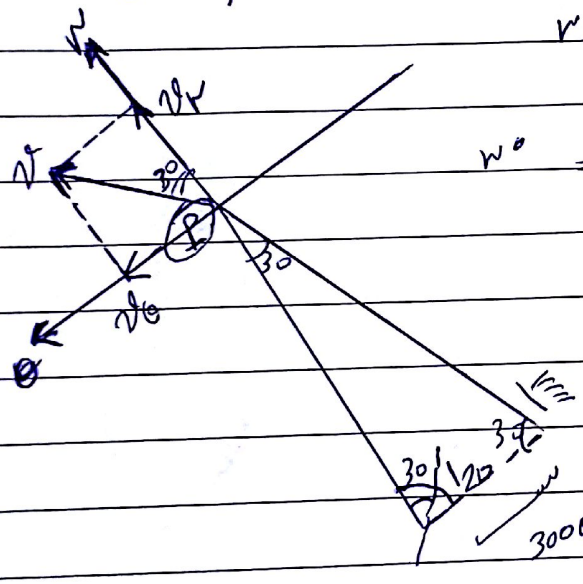
$$a_\theta = -a \sin 60 = -1,3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -1,1 \ m/s^2$$

$$\theta'' = \frac{a_\theta - 2r'\theta'}{r} = \frac{-1,1 - 2(0,3)(-1,5\times10^{-3})}{150}$$

$$\theta'' \simeq -7,3\times10^{-3}$$

10 / 6,9

يتحرك ذراع اسطوانة هيدروليكية بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ($\dot{r}=2 m/s$) عكس اتجاه دوران الذراع المشوق حول المحور o. المطلوب للوضع المبين في الشكل والموافق لـ ($\theta = 30°$) حساب القيم العددية للكميات التالية: r'' و θ'' و r' و θ'



أولا:

$$v_r = v\cos 30 = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_r = \sqrt{3} \ m/s$$

$$v_\theta = v\sin 30 = 2\times\frac{1}{2} \Rightarrow v_\theta = 1 \ m/s$$

$$\Rightarrow \theta' = \frac{v_\theta}{r} = \frac{1}{300} \simeq 3,3\times10^{-3} \ rad/s$$

$$A = A_r + A_\theta = A^n + A^t$$

$$A^n = 0$$

ملاحظة: عندما يوجه في المسألة مكبس ذراع هيدروليكي تكون $A^n = 0$ ومنه $A = A^t$

$$A = A^t = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \because v = const$$

Scanned by CamScanner

$A_n = 0$ ، $A_t = 0$ $\Rightarrow$ $A_{كلي} = 0$

وهذا يكون (A_r و A_θ) تلاشي بعض

$\Rightarrow r'' = r\theta'^2$

$r'' = 300 \times (3,3 \times 10^{-3})^2$

$r'' \simeq 3,2 \times 10^{-3}$ m/s²

$\theta'' = \frac{-2r'\theta'}{r} = \frac{-2 \times \sqrt{3} \times 3,3 \times 10^{-3}}{300}$

$\theta'' \simeq -3,8 \times 10^{-5}$ r/s²

ملاحظات: * السرعة دائماً من مماس المسار (في الحركة الاستوائية).

* السرعة محورية على دفع القطر باتجاه W

* لرسم المحور (r) من النقطة الثابتة على الحركة.

* لرسم المحور (θ) يكون عامودي على r

+ ViVa RB's

:)